

# יסודות הפיזיקה 20125

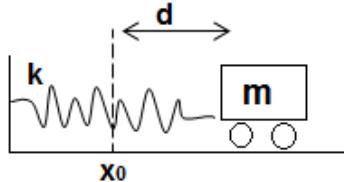
פרק 21 - תנועה הרמוניית - עם משוואות דיפרנציאליות

## תוכן העניינים

1	. תנועה הרמוניית פשוטה
4	. תרגילים מסכמים
7	. תנועה הרמוניית מרווחת

## תנועה הרמוניית פשוטה:

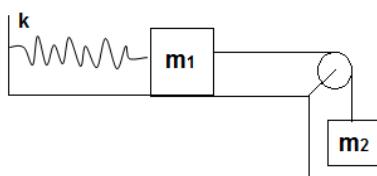
שאלות:



**1) מסה מתנוגשת במסה**

מסה  $m$  מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ המחברת לקיר בעל קבוע קפיץ  $k$ . מונחים את המסה מרחק  $d$  מהמקום בו הקפוץ רופיע ומשחררים מנוחה. מצא את  $(t)$  של המסה.

**2) מסה על שולחן מחוברת למסה תלולה**



מסה  $m_1$  מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפוץ בעל קבוע  $k$ . ממסה יוצאת חוט העובר דרך גלגלת אידיאלית וקשרו למסה נוספת התלויה באוויר  $M$ .

א. מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת (קבע את הראשית בנקודת שבת הקפוץ רפני).

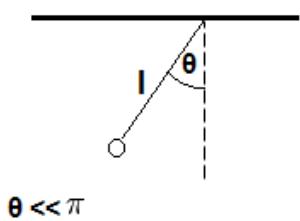
ב. מצא את תדיות התנועה של המערכת.

ג. מהי האמפליטודה המקסימלית האפשרית לתנועה כך שהמתיחות בחוט לא תתאפס במהלך התנועה?

**3) דוגמה - מטוטלת מתמטית (עם מומנטים)**

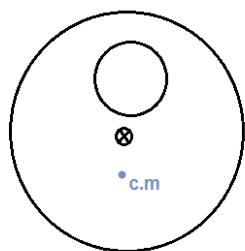
נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה מהתקarra. אורך החוט של המטוטלת הוא  $l$ .

מצא את תדיות התנודות הקטנות ואת הזווית כפונקציה של הזמן. הנח כי המטוטלת מתחילה את תנועתה מנוחה בזווית ידועה  $\theta$  (דרך מומנטים).



**4) דוגמה - דיסקה עם חור**

מצא את תדיות התנודות הקטנות של דיסקה בעלת מסה  $M$  ורדיוס  $R$  אם ידוע כי במרחק  $R$  ממרכז הדיסקה קדחו חור ברדיוס רביעי  $R$  (הדיםקה מחוברת במסמר במרכז אל הקיר).



**5) דוגמה - מטוטלת מתמטית (עם אנרגיה)**

נתונה מטוטלת (מתמטית) תלוייה מהתקarra.

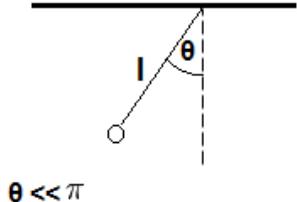
אורך החוט של המטוטלת הוא  $l$ .

מצא את תדריות התנודות הקטנות ואת הזווית

כפונקציה של הזמן.

הנח כי המטוטלת מתחילה את תנועתה ממנוחה

בזווית ידועה  $\theta$  (דרך אנרגיה).



$$\theta \ll \pi$$

**6) גליל מחובר לקרפייז מתגלגל ללא חילקה**

גליל בעל מסה  $m$  ורדיוס  $R$  נמצא על משטח אופקי

לא חלק ומוחובר באמצעות קרפייז אל הקיר.

קבוע הקרפייז הוא  $k$  והוא מחובר למרכו של הגליל.

הנח שתנועת הגליל אופקית בלבד והוא מתגלגל

לא חילקה על המשטח.

מצא את תדריות התנודות הקטנות.

פתרונות פעם אחד באמצעות אנרגיה ופעם נוספת

באמצעות כוחות ומומנטים.

**7) גלגלת מסה וקרפייז**

במערכת הבאה, המסה  $m_1$  קשורה בחוט דרך גלגלת אל קרפייז המוחובר לקרקע. הגלגלת אינה איזידלית.

נתון:  $R$  רדיוס הגלגלת,  $m_2$  מסת הגלגלת,  $k$  קבוע הקרפייז.

הנח כי החוט לא מחליק על הגלגלת.

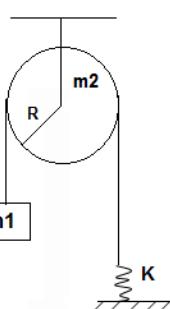
א. מצא את נקודת שיווי המשקל.

ב. מצא את תדריות התנודה.

ג. מושכים את המסה אורך  $d$  מנקודת שיווי המשקל.

מהו  $d_{\max}$  המרחק המקסימלי שנייתן למשוך את המסה

ambilי שהמתיחות בחוט תתאפס במהלך התנועה?

**8) מוט תלוי מחובר עם קרפייז לקיר**

מוט בעל אורך  $L$  ומסה  $M$  (התפלגות אחידה)

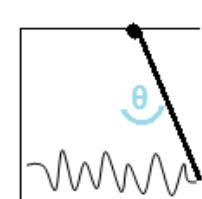
תלויה מהתקarra וחופשי להסתובב סביב נקודת התליה.

קצוות השני של המוט מחובר בקרפייז, בעל קבוע  $k$  לקיר.

הקרפייז רופיע כאשר המוט נמצא מאונך לתליה.

א. הראה כי תנועת המוט בזווית קטנות היא תנועה הרמוניית ומצא את תדריות התנועה.

ב. מצא את הזווית של המוט כפונקציה של הזמן אם המוט משוחרר ממנוחה בזווית נתונה  $\theta_0$ .



### תשובות סופיות:

$$x(t) = -\frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{2m}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t + \frac{\pi}{2}\right) + x_0 \quad (1)$$

$$A_{\max} = \frac{g}{\omega^2} \quad . \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \quad . \quad x = \frac{m_2 g}{k} \quad . \quad (2)$$

$$\theta(t=0) = -\omega A \sin \varphi \quad (3)$$

$$-\left(\frac{16}{247} \frac{g}{R}\right)(\theta - 0) = \ddot{\theta} \quad (4)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

$$E = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}} \quad . \quad (6) \quad \text{באמצעות אנרגיה:}$$

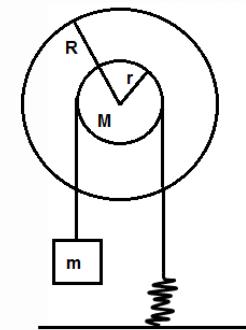
$$\sum F_x = -k(x - x_3) = m\ddot{x} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}} \quad . \quad \text{באמצעות כוחות ומומנטים:}$$

$$d_{\max} = \frac{m_1 g}{k} \quad . \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + \frac{1}{2} m_2}} \quad . \quad x_0 = \frac{m_1 g}{k} \quad . \quad (7)$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k^+}{m^+}} t\right) \quad . \quad \omega = \sqrt{\frac{k^+}{m^+}} \quad . \quad (8)$$

## תרגילים מסכימים:

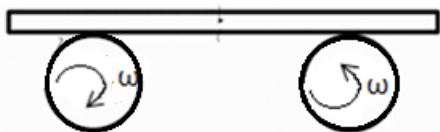
**שאלות:**



**1) דיסקה כפולה מסה וקפיץ**

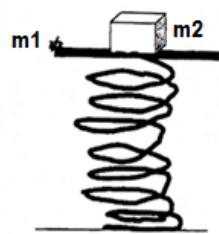
נתונה דיסקה ממושמרת במרכזיה לקיר (כלומר הדיסקה יכולה להסתובב אך לא לנוע מעלה ומטה). הדיסקה בנוי משתי דיסקות מודבקות בעלות רדיוס  $r$  לדיסקה הקטנה ו-  $R$  לדיסקה הגדולה. סיבוב הדיסקות מלווה בחרוטים חמוטאים כמתואר בשרטוט. עוד נתון כי אין חalkה לחוטים.

- מצאו את תדריות התנועות.
- מהי האנרגיה הכוללת של המערכת?



**2) מוט על שני גלגלים**

מוט בעל מסה  $M$  מונח על שני גלגלים קבועים במרכזם. הגלגלים מסתובבים במהירות זוויתית  $\omega$  כך שהגלגל הימני מסתובב נגד כיוון השעון והשמאלי עמו כיוון השעון. בין המוט והגלגלים קיימים חיכוך ומקדם החיכוך הקינטי נתון. מניחים את המוט כך שמרכזו נמצא במרחק  $A$  מהמרכז בין הגלגלים. מצא את תדריות התנועה של המוט.



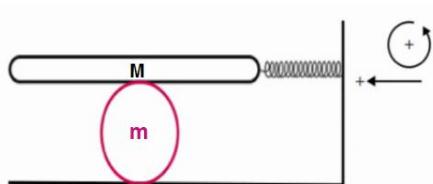
**3) מסה על משטח על קפיץ אנכי**

על קפיץ שבתווך  $A$  מונח משטח שמסתו  $m_1$ , המשטח צמוד לקצתו של הקפיץ. על המשטח מונח גוף שמסתו  $m_2$ . מכוחים את הקפיץ בשיעור  $\Delta y$  ומשחררים.

a. מה צריך להיות  $\Delta y_{\min}$  כדי שהגוף יתנתק מן המשטח באיזה שהוא שלב?

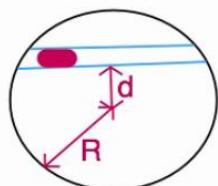
b. הנתיחה:  $m_2 = 0.06\text{kg}$  ,  $m_1 = 0.04\text{kg}$  ,  $k = 10 \frac{\text{Nr}}{\text{m}}$  ,  $\Delta y = 2\Delta y_{\min}$  .  
ומצאו את רגע הניתוק.

g. באמצעות הנתונים המופיעים מסעיף b, מהו מקומו ומהירותו של המשטח ברגע שהגוף ניתק מן המשטח?



4) משטח על דיסקה מחובר לקפיץ

נתונה מערכת כבשותות (אין החלקה במערכת).  
מהי תדירות?



5) תנודה בתעללה בכדו"א

בתוך כדור הארץ נחפרה תעלה כבשותות.

מסת כדור הארץ  $M$ .

מהי תדירות התנודות הקטנות של מסה החופשית לנوع בתעללה?

6) שתי מסות מחוברות בקפיץ\*\*

שתי מסות  $m_1$  ו-  $m_2$  מחוברות בקפיץ בעל קבוע  $k$  ואורך רפי  $l$ .  
הmassות נמצאות במנוחה על מישור אופקי חלק.

נתנים דחיפה ימינה למסה  $m_1$  המKENה לה מהירות ההתחלתית  $v_0$ .

א. מהי תדירות התנודות של התנועה (כתלות בנתוני הפעעה)?

רמז : על מנת לפתור את המשוואות יש להחליף משתנים

-ל-

$$x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; x_{rel} = x_1 - x_2$$

ב. מצאו את מיקום המסה  $m_2$  כתלות בזמן.

### תשובות סופיות:

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2}Kx^2 - mgx + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \text{ב.ג.} \quad \sqrt{\frac{2kR}{\frac{1}{2}MR + \frac{r^2}{R}}} \quad \text{א.ג.} \quad (1)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu_k g}{d}} \quad (2)$$

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \cos^{-1} \left( -\frac{1}{2} \right) \quad \text{ב.ג.} \quad \Delta y_{\min} = \frac{(m_1 + m_2)}{k} \quad \text{א.ג.} \quad (3)$$

$$v(t) = \dot{y}(t) = -2\Delta y_{\min} \omega \sin(\omega t), \quad \Delta y_{\min} = \frac{(m_1 + m_2)}{k} \quad \text{א.ג.}$$

$$\ddot{x} = -\left( \frac{K}{m+2M} \right) x \quad (4)$$

$$\ddot{x} = -\left( \frac{M}{R^3} \right) (x - 0) \quad (5)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{א.ג.} \quad (6)$$

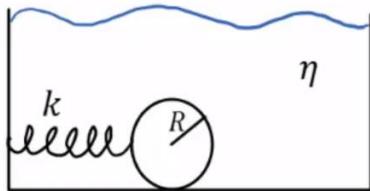
$$, \quad A = \frac{\sqrt{v_0^2 + l^2 \omega^2}}{\omega}, \quad x_2(t) = \frac{m_1}{m_1 + m} (l + v_0 t) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{ב.ג.}$$

$$\tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega l}$$

## תנועה הרמוניית מרוסנת:

שאלות:

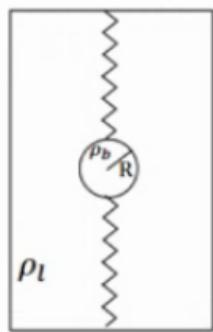
**1) כדור במיכל מים**



כדור בעל מסה  $m$  ורדיויס  $R$  נמצא בתחום מיכל מים ומחובר באמצעות קפיץ אופקי לדופן המיכל. קבוע הקפיץ הוא  $k$ . בתנועת הגוף במים, מפעלים המים על הכדור כוח התנגדות המתכוונתי וההפוך למחרותו. כוח זה נקרא כוח סטוקס וגודלו הוא:  $-6\pi R^2 \eta \ddot{x}$ . כאשר  $\ddot{x}$  היא צמיגות המים ו-  $R$  הוא רדיוס הכדור.

התיחס ל-  $m$ ,  $k$ ,  $\eta$ ,  $R$  נתונים ומצא את תדרות התנודות של הכדור בהנחה ש-  $R < \frac{\sqrt{mk}}{3\pi\eta}$ .

**2) שני קפיצים בנוזל**



כדור נמצא בתחום תיבת מלאה במים ומחובר עם קפוץ אידיאלי לקצה העליון של התיבה ועם קפוץ אידיאלי נוסף זהה לקצה התיכון של התיבה.

נתון:  $R$  - רדיוס הכדור,  $m$  - צפיפות המסה של הכדור,  $m$  - צפיפות המסה של המים,  $K$  - קבוע שני הקפיצים ו-  $\eta$  - צמיגות המים.

(תזכורת: כאשר כדור מצוי בתחום נוזל פועלים עליו כוח ציפה:  $F = \rho g V$  וכוח סטוקס:  $F = 6\pi R \eta \ddot{x}$ ).

א. מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת.

ב. מה התנאי שייהו תנודות הרמוניות?

מצא את התדרות בהנחה שתנודות אלו מתקינות.

ג. מצא את התנאי בו יחולר הכדור כדי מהר לנקודת שיווי המשקל.

**3) איבוד אנרגיה במחזור**

בתנועה הרמוניית מרוסנת קיימים ריסוון חלש כך שהאמפליטודה של התנועה יורדת ב-2.5 אחוז כל מחזור. בכמה אחוז יורדת האנרגיה בכל מחזור?

**4) משקלות במיכל מים תלוי מהתקורה**

משקלות שמסתה :  $M = 1\text{kg}$  נמצאת במיכל מים ומחוברת לתקורה באמצעות

$$\text{קפי} \ddot{\text{z}} \text{ בועל קבוע : } 20 \frac{\text{N}}{\text{m}} = k.$$

$$\text{כוח ההתנגדות שפעילים המים הוא מהצורה} \ddot{\text{z}} = \ddot{\text{F}} \text{ כאשר : } 4 \frac{\text{kg}}{\text{sec}} = \ddot{\text{F}}$$

הניחו שהמשקלות אינה יוצאת מהמים ואנייה פוגעת ברצפה.

א. תוק כמה זמן תרד האמפליטודה לחמישית מגודלה ההתחלתית?

(הניחו שהפaza היא אפס)

ב. לאחר כמה מחזוריים זה יקרה?

**5) מסה באمبט מים וدبש**

מסה :  $m = 1\text{kg}$  נמצאת באمبט מלא מים, המסה מחוברת באמצעות שני

$$\text{קפי} \ddot{\text{z}} \text{ים והם בעלי קבוע : } 25 \frac{\text{N}}{\text{m}} = k \text{ לשתי דפנות האمبט ונעה ללא חיכוך עם}$$

ריצפת האمبט. מזיזים את המסה  $0.5\text{m}$  מנקודת שיווי המשקל ומשחררים

$$\text{מנוחה. התנגדות המים מפעילה כוח גראד : } \ddot{\text{z}} = \ddot{\text{F}} \text{ כאשר : } 10 \frac{\text{kg}}{\text{sec}} = \ddot{\text{F}}$$

א. מהו העתק המסה כתלות בזמן?

ב. מחליפים את המים בدبש מה שמנגדיל את גראד פי  $\sqrt{2}$ . מזיזים שוב את

המסה  $0.5\text{m}$  ומשחררים, מהו העתק המסה כתלות בזמן?

**תשובות סופיות:**

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left( \frac{3\pi R \eta}{m} \right)^2} \quad (1)$$

$$\frac{2K}{m} = \frac{6\pi\eta R^2}{2m} \text{ ג.} \quad \omega^* = \sqrt{\frac{2K}{m} - \left( \frac{6\pi\eta R}{2m} \right)^2} \text{ ב.} \quad y_{eq} = \frac{F_b}{2K} \text{ א.} \quad (2)$$

5% (3)

ב. בערך מחזור אחד. 1.6 sec א. (4)

$$x(t) = \left( \frac{1}{2} + \frac{5}{\sqrt{2}} t \right) e^{-5\sqrt{2}t} \text{ ג.} \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-5t} \cos\left(5t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ א.} \quad (5)$$